الثانوية الإعدادية — باكالوريا فرض مراقبة
احمد بن عبد القادر — كلد 4 —

ابن الخزار بقبلي
2015/04

تمرين عدد 1 :

1) نرمز بـ x لعرض المستطيل فإن طوله $x+2$ .

مساحته 1 يعني $x(x+2)=1$ يعني $x^2+2x-1=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-(\sqrt{2})^2=0$

$\Leftrightarrow (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})=0$

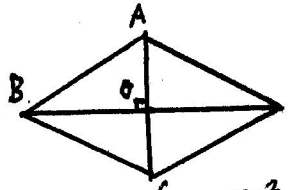
$\Leftrightarrow x=\sqrt{2}-1$ أو $x=-1-\sqrt{2}$

بما أن $x>0$ فإن $x=\sqrt{2}-1$

محيطه :

$2[x+(x+2)] = 2(2x+2) = 4(x+1)$

$= 4(\sqrt{2}-1+1) = 4\sqrt{2}$ .




2) ABCD معين مركزه O .

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم OAB :

$x^2 = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+6}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}(x+2)^2 + \frac{1}{4}(x+6)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 = x^2+2x+4+x^2+12x+36$

$\Leftrightarrow 2x^2-16x-40=0$

$\Leftrightarrow x^2-8x-20=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2-36=0$

$\Leftrightarrow (x-4-6)(x-4+6)=0$

$\Leftrightarrow (x-10)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=10$ أو $x=-2$ .

بما أن $x>0$ فإن : $x=10$ .



3) لدينا $a=3b+2$ عدد صحيح طبيعي باقي قسمته على 3 يساوي 2 .

$a^2=(3b+2)^2=9b^2+12b+4$

$=3(3b^2+4b+1)+1$

إذن باقي قسمة $a^2$ على 3 يساوي 1 .

4) نرمز بـ D المسافة بين المدينتين . السرعة = المسافة / المدة الزمنية

← المدة الزمنية = المسافة / السرعة

نحسب أولا مدة السيارة خلال كامل الرحلة :

المدة الزمنية المستغرقة خلال النصف الأول : $T_1=\frac{\frac{1}{2}D}{80}$

" " " النصف الثاني $T_2=\frac{\frac{1}{2}D}{120}$

← المدة الزمنية المستغرقة خلال كامل الرحلة :

$T=T_1+T_2=\frac{\frac{1}{2}D}{80}+\frac{\frac{1}{2}D}{120}$

$=\frac{1}{2}D\left[\frac{1}{80}+\frac{1}{120}\right]$

معدل سرعة السيارة خلال كامل الرحلة :

$V=\frac{D}{T}=\frac{D}{\frac{1}{2}D\left[\frac{1}{80}+\frac{1}{120}\right]}=\frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}}=\frac{2}{\frac{80+120}{80\times120}}$

$=\frac{2\times80\times120}{200}=96\ km/h$

وليس كما نظن قبل أن $100=\frac{80+120}{2}$ هو المعدل لأن المعدل هو المتوسط الحسابي لـ 80 و 120 .

المسافة بين المدينتين : $D=V\times T$

$=96\times3{,}5=336\ km$ .

تمرين عدد 2:

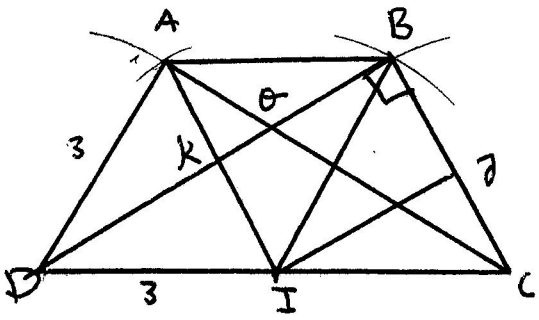
1)

2) أ) $AB = ID$ و $(AB) \parallel (ID)$

إذن $ABID$ متوازي أضلاع.

وبما أن $AD = AB = 3$

إذن $ABID$ معين لأن له ضلعين متتاليين متقايسين.




ب) في المثلث $BCD$ النقطة $I$ تنتمي إلى $[DC]$ و $IB = IC = IB = 3$

$\leftarrow$ المثلث $BCD$ قائم الزاوية في $B$.

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم $BCD$:

$$BD^2 = DC^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$

إذن $BD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

ج) في المثلث $OCD$ لدينا: $B$ تنتمي إلى $(OD)$ و $A$ تنتمي إلى $(OC)$.

و $(AB)$ متوازي لـ $(CD)$. حسب مبرهنة طالس:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \longrightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow OD = 2OB.$$

$$BD = OB + OD = OB + 2OB = 3OB.$$

$$\longrightarrow OB = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

د) في المثلث $BCD$: $I = C * D$ و $J = B * C$ $\leftarrow$ $(IJ) \parallel (BC)$

$I = C * D$ و $K = B * D$ $\leftarrow$ $(IK) \parallel (BC)$

$\leftarrow$ $IJBK$ متوازي أضلاع ضلعه و له زاوية قائمة $\widehat{KBJ} = 90$ $\longrightarrow$ هو مستطيل.

إذن هو مستطيل.

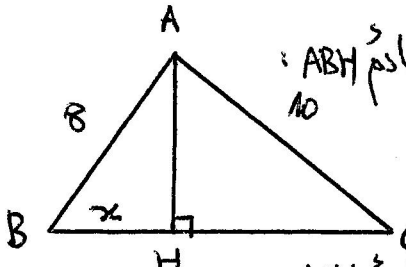
$\sqrt{4/8}$ $\longleftarrow$

هـ) مساحة $ABC$: $A = KB \times BJ = \frac{1}{2} BD \times \frac{1}{2} BC$

$$= \frac{1}{4} 3\sqrt{3} \times 3 = \frac{9}{4}\sqrt{3}.$$

تمرين عدد 3:

1) بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم $ABH$:




$$AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$\longrightarrow AH^2 = 64 - x^2$$

* بتطبيق مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم $ACH$:

$$AH^2 = AC^2 - HC^2$$

$$\longrightarrow AH^2 = 100 - (12 - x)^2.$$

ب)

$$64 - x^2 = 100 - (12 - x)^2$$

$$\leftrightarrow 64 - x^2 = 100 - (144 - 24x + x^2)$$

$$\leftrightarrow 64 - x^2 = 100 - 144 + 24x - x^2$$

$$\leftrightarrow 24x = 108 \longrightarrow x = \frac{108}{24} = 4{,}5.$$

و $AH^2 = 64 - x^2 = 64 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 64 - \frac{81}{4}$

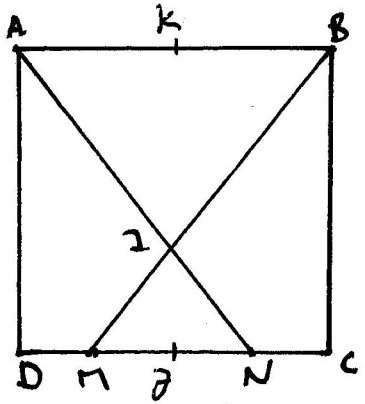
$$= \frac{256 - 81}{4} = \frac{175}{4}$$

إذن $AH = \sqrt{\frac{175}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{7}$.

ج) مساحة $ABC$: $A = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}\sqrt{7} \times 12$

$$= 15\sqrt{7}.$$

تمرين 4:




1) أ) مقارنة المثلثين BMC و ADN:

$BC = AD = 1$.
$CM = DN = x$.
$\widehat{BCM} = \widehat{ADN} = 90°$
إذن حسب الحالة الثانية لتقايس المثلثات نجد أن BMC و ADN متقايسين.

$AN = BM$ ← و أن $\widehat{IBC} = \widehat{IAD}$

$\widehat{IBA} = \widehat{IAB}$ ⟶ $IA = IB$.

وبالتالي: $IM = MB - IB = AN - IB = IN$ ;

ب) $IA = IB$ ← $K = A * B$ والنقط I و J و K على استقامة واحدة
$IM = IN$ ← $J = M * N$

بتطبيق مبرهنة طالس في المثلث IAK:

$\frac{IK}{IJ} = \frac{AK}{JN} = \frac{AB}{MN}$

⟶ $\frac{2K}{IJ} = \frac{1}{1-2x}$ ⟶ $IJ = (1-2x)\,IK$.

ج) لدينا: $IJ + IK = KJ = 1$

⟶ $IK + (1-2x)\,IK = 1$ ⟶ $IK\,(2-2x) = 1$

⟶ $IK = \frac{1}{2(1-x)}$.

وبالتالي

$IJ = \frac{1-2x}{2(1-x)}$

2) $A = \frac{1}{2} AB \cdot IK + \frac{1}{2} MN \cdot IJ$.

$= \frac{1}{2} \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2}(1-2x) \times \frac{1-2x}{2(1-x)}$

$= \frac{1}{4(1-x)} \left[1 + (1-2x)^2\right]$

$= \frac{2+4x^2-4x}{4(1-x)}$

$= \frac{4x^2-4x}{4(1-x)} + \frac{2}{4(1-x)}$

$= \frac{4 \cdot x(x-1)}{4 \cdot 1-x} + \frac{1}{2(1-x)}$

⟶ $A = -x + \frac{1}{2(1-x)}$.

ب) $A = \sqrt{2}-1 \iff -x + \frac{1}{2(1-x)} = \sqrt{2}-1$.

$\iff \frac{1}{2(1-x)} = (\sqrt{2}-1) + x$

$\iff 1 = 2(1-x)\left[(\sqrt{2}-1) + x\right]$.

$\iff \frac{1}{2} = \sqrt{2}-1+x+(1-\sqrt{2})x - x^2$

$\iff x^2 - (2-\sqrt{2})x - \sqrt{2} + \frac{3}{2} = 0$

$\iff \left(x - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{4\sqrt{2}-6}{4} = 0$

$\iff \left(x - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{6-4\sqrt{2}}{4} - \frac{4\sqrt{2}-6}{4} = 0$

$\iff \left(x - \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$

$\iff x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

لما $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ فإن $M$ و $N$ متقايسة.

$DM = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ⟶ $CM = \frac{\sqrt{2}}{2} = DN$

بما أن المربع ABCD طول ضلعه 1 فقطره $\sqrt{2}$.

النقطة I التي تنتمي إلى [AC] و [DJ] هي منتصف [AC]

و J هي

ج) دراسة الحصر باستعمال الفرق :

$$A-(\sqrt{2}-1) = -x+\frac{1}{2(1-x)} - (\sqrt{2}-1)$$

$$= \frac{-x(2\cdot(1-x)) + 1 - (\sqrt{2}-1)\times 2x(1-x)}{2(1-x)}$$

$$= \frac{2x^2-2x+1-2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{2}-1)x}{2(1-x)}$$

$$= \frac{2x^2-2(2-\sqrt{2})x+3-2\sqrt{2}}{2(1-x)}$$

$$= \frac{x^2-(2-\sqrt{2})x+\frac{3}{2}-\sqrt{2}}{1-x}$$

$$= \frac{\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} - \sqrt{2}}{1-x}$$

$$\longrightarrow A-(\sqrt{2}-1) = \frac{\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1-x} \geq 0$$

$$\longrightarrow A \geq \sqrt{2}-1.$$

$$* \quad A-\frac{1}{2} = -x+\frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-x\times 2(1-x)+1-(1-x)}{2(1-x)}$$

$$= \frac{2x^2-2x+1-1+x}{2(1-x)}$$

$$= \frac{2x^2-x}{2(1-x)} = \frac{x(2x-1)}{2(x-1)} \leq 0$$

$$\longrightarrow A \leq \frac{1}{2}$$

إذن : $\sqrt{2}-1 \leq A \leq \frac{1}{2}$ .

وهذا أفضل حصر ممكن لـ A لأن :

من أجل $x=0$ : $A=\frac{1}{2\times 1}=\frac{1}{2}$

من أجل $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ : $A=\sqrt{2}-1$ (سؤال ج/2)

د) استنتاج :

بما أن الحصر : $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ والعبارة $A=-x+\frac{1}{2(1-x)}$

نستعمل على الحصر : $0 \leq A \leq 1$ .

ونحول كتابة A :

$$A=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{1-x}$$

نستعمل على الحصر : $\frac{1}{4} \leq A \leq 1$ .

---

توزيع النقاط

تمرين رقم 1 : $4\times(1)=4$ .

تمرين رقم 2 :

1) أ) (1)

ب) (1) + (1)

2) (1)

3) (1)

4) (0,5) + (0,5)

تمرين رقم 3 :

أ) (1) + (1)

ب) (0,5) + (1) + (1)

تمرين رقم 4 :

1) أ) (1)

ب) (0,5) + (0,5)

2) (1)

ج) (0,5) + (0,5)

3) (1)

ب) (0,5) + (1)

ج) (0,5)